数理解析研究所講究録 1396 巻 2004 年 31-41

可測ノルムに関する条件

原井 敬子 (Keiko Harai)
お茶の水女子大学大学院 人間文化研究科
(Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University)

前田 ミチヱ (Michie Maeda)
お茶の水女子大学 理学部
(Department of Mathmatics, Faculty of Science, Ochanomizu University)

1 導入

Gauss シリンダー測度を測度に拡張するための条件として，*Gross* が可測ノルムという概念を導入した．これは，無限次元 *Hilbert* 空間上での測度論において重要な役割を果たしている．後に，$Dudley - Feldman - LeCam$ が別の可測ノルムの概念を導入した．これは，一般のシリンダー測度を測度に拡張するための必要十分条件になっている．これら二つの可測ノルムの概念には類似した条件があり，[12] において，ℓ^2 上に具体的にシリンダー測度とノルムを構成しそれらの条件について研究している．4 章で，[12] では *open* であった問題をいくつか解決する．5 章では，*Baxendale* による *Gauss* シリンダー測度の定義を導入して，*Gauss* シリンダー測度の定義を広げる．標準的な *Gauss* シリンダー測度と比較しながら，可測ノルムに類似した条件について調べる．

2 準備

この論文では，X を Banach 空間，X' を X の位相的双対空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を X' と X の natural pairing とする．また，$\mathcal{B}(X)$ を X 上の Borel σ-algebra とする． H を実可分 Hilbert 空間，$<\cdot,\cdot>$ を H 上の内積，$FD(H)$ を H の有限次元部分空間全体，$\mathcal{F}$ を H 上の有限次元部分空間への直交射影の全体とする，また，I で恒等写像を表すことにする.

Z が，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n \in X', D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して，次のように表されるとき，シリン

ダー集合という.

$$Z = \{x \in X; ((\xi_1, x), (\xi_2, x), \ldots, (\xi_n, x)) \in D\}$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ を固定したときのシリンダー集合全体 $\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ は σ-algebra になるが,シリンダー集合全体 $\mathcal{R}$ は σ-algebra になるとは限らない.

また,Hilbert 空間上のシリンダー集合は,直交射影を使って次のように表すことができる.

$$Z = \{x \in H; Px \in F\} \qquad (P \in \mathcal{F},\ F \in \mathcal{B}(PH))$$

次にシリンダー測度を定義する.

定義 2.1 (シリンダー測度). $\mathcal{R}$ 上に定義された関数 μ が次の条件を満たすとき,シリンダー測度であるという.

(i) $\mu\ :\ \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$

(ii) μ の $\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ への制限は確率測度

次に Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する.

定義 2.2 (Gauss シリンダー測度). 集合関数 $\gamma : \mathcal{R} \to [0,1]$ が次のような形で表されるとき,*Gauss* シリンダー測度であるという.

$$\gamma(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx$$

ただし,$Z = \{x \in H; Px \in F\}$, $n = \dim PH$, dx は PH 上の *Lebesgue* 測度とする.

次に,可測ノルムの定義をする。

定義 2.3 (Gross の可測ノルム). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して,$P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathcal{F}$ に対しても,

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき、$\|\cdot\|$ は μ-可測 (*Gross*) であるという.

上の定義は次のように書きかえることができる.

$\|\cdot\|$ は μ-可測 (*Gross*)

$\Longleftrightarrow$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $G \in FD(H)$ が存在して，$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても，

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし，$N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$, $F^\perp$ は F の直交補空間とする．

無限次元 Hilbert 空間上では，*Gauss* シリンダー測度 γ は可算加法的測度ではない。そこで，初めの位相よりも弱い位相を導入する新しいノルムを考え，これに関する完備化空間の中ではじめの空間上の *Gauss* シリンダー測度を埋め込み写像による像測度として考える．これが可算加法的となるための十分条件を求めたのが，L.Gross である．

定義 2.4 (Abstract Wiener Space). γ を H 上の *Gauss* シリンダー測度，$\|\cdot\|$ を H 上の γ-可測（*Gross*）なノルム，B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化，i を H から B への埋め込み写像とするとき，(i, H, B) を *Abstract Wiener Space* という．

Gross が可測ノルムを定義した後，Dudley-Feldman-LeCam が別の可測ノルムを定義した．この可測ノルムは一般のシリンダー測度を可算加法的測度に拡張するための必要十分条件となるものである．

定義 2.5 (D.F.L の可測ノルム). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $G \in FD(H)$ が存在して，$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても，

$$\mu(\{P_F(N_\varepsilon) + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき，$\|\cdot\|$ は $\mu-$ 可測 $(D.F.L.)$ であるという．ただし, P_F は H から F への直交射影とする.

したがって，2つの可測ノルムの条件を比較すると，D.F.L の可測ノルムの条件よりも Gross の可測ノルムの条件の方が強い条件であることが分かる．

3 可測ノルムを取り囲む条件とその関係

ここでは，Gross の可測ノルムの条件，D.F.L の可測ノルムの条件を取り囲む条件とその関係を紹介する，

定理 3.1. H を実可分ヒルベルト空間，μ を H 上のシリンダー測度，$\|\cdot\|$ を H 上で定義された連続なノルム，B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化，i を H から B への埋め込み写像とする．さらに，Y を *weak∗* 位相 $\sigma(B'', B)$ をもった B の *bidual* B'' とし，j を H から Y への埋め込み写像とする．このとき，次が成り立つ．

$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$, $\quad (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Rightarrow (vii)$.

さらに，μ が連続であるときは，次が成り立つ．
$(iii) \Rightarrow (vi)$,　　$(iv) \Rightarrow (vii)$.

(i) I に強収束する $\mathcal{F}$ の任意の増加列 P_n が，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たす．

(ii) $\|\cdot\|$ は μ-可測 $(Gross)$ である．

(iii) I に強収束する増加列 $P_n \in \mathcal{F}$ で，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たすものが存在する．

(iv) I に強収束する増加列 $P_n \in \mathcal{F}$ で，

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in H; \sup_{1\le k\le n} \|P_k x\| > N\}) = 0$$

を満たすものが存在する，

(v) $\|\cdot\|$ は μ-可測 $(D.F.L.)$ である．

(vi) $i(\mu)$ は測度に拡張できる．

(vii) $j(\mu)$ は測度に拡張できる．

証明．$(i) \Rightarrow (ii)$ は ([1]) を参照
$(ii) \Rightarrow (iii)$ は ([1]) を参照
$(iii) \Rightarrow (iv)$ は ([8]) を参照
$(v) \Leftrightarrow (vi)$ は ([2]) を参照
$(iii) \Rightarrow (iv)$ は ([14]) を参照
$(iv) \Rightarrow (vii)$ は ([3]) と ([14]) を参照

4　$(\ell^2)^*$ 上の $Dirac$ 測度から導入したシリンダー測度の例

まず，ℓ^2 上に連続なノルムとシリンダー測度を構成する。$e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$ (1 は n 番目に位置する) とすると，$\{e_n\}$ は ℓ^2 上の完全正規直交基底となる．

(i) $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_4$ の構成
$\{\alpha_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $\alpha_n \to \infty (n \to \infty)$ を満たす非負の単調増加列とする．また，Γ_1

を $\{\pm\alpha_n(e_1+e_2+\ldots e_n); n=1,2,\ldots\}$ の convex hull とし，B_1 を ℓ^2 上の開単位球，$U_1=\Gamma_1+B_1$ とする．このとき，U_1 は，open, convex, absorbing, circled な集合となる．$\|\cdot\|_1$ を U_1 の gauge とし，$\|x\|_4=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{n}\right)^2}$ とする．このとき，$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_4$ は，ℓ^2 上の連続なノルムとなる．ここでは，[12] に従って $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_4$ と表現することにした．

(*ii*) $\mu_{\mathbf{a}}$ と $\mu_{\mathbf{b}}$ の構成

$(\ell^2)^*$ を ℓ^2 の代数的双対空間とし，位相は弱位相 $\sigma((\ell^2)^*,\ell^2)$ とする．$(\cdot,\cdot)$ で $(\ell^2)^*$ と ℓ^2 の natural pairing を表すことにする．このとき，ℓ^2 上のシリンダー集合 Z と $(\ell^2)^*$ 上のシリンダー集合 $\tilde{Z}$ は次のように表される．

$$Z=\{x\in\ell^2 : (<x,\xi_1>,\ldots,<x,\xi_n>)\in D\},$$

$$\tilde{Z}=\{x\in(\ell^2)^* : ((x,\xi_1),\ldots,(x,\xi_n))\in D\}$$

ただし，$\xi_1,\ldots,\xi_n\in\ell^2$, $D\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする．
$\mathcal{I}$ を $\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を含む ℓ^2 の代数的基とする．
次のように，$(\ell^2)^*$ 上のに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ をとる．

$$(\mathbf{a},e_n)=1,\ n=1,2,\ldots$$
$$(\mathbf{a},e_\alpha)=0,\ e_\alpha\in\mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$$
$$(\mathbf{b},e_n)=n,\ n=1,2,\ldots$$
$$(\mathbf{b},e_\alpha)=0,\ e_\alpha\in\mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$$

$(\ell^2)^*$ 上の *Dirac* 測度 $\delta_{\mathbf{a}}$ と $\delta_{\mathbf{b}}$ によって導入される ℓ^2 上のシリンダー測度 $\mu_{\mathbf{a}}$，$\mu_{\mathbf{b}}$ を次のように定義する．

$$\mu_{\mathbf{a}}(Z)=\delta_{\mathbf{a}}(\tilde{Z})$$

$$\mu_{\mathbf{b}}(Z)=\delta_{\mathbf{b}}(\tilde{Z})$$

今まで分かっていることを表すと，次のようになる．

ノルム	測 度	(*i*)	(*ii*)	(*iii*)	(*iv*)	(*v*)	(*vi*)	(*vii*)
$\|\cdot\|_1$	γ							
	μ_a			○	○			
$\|\cdot\|_4$	γ	○	○	○	○	○	○	○
	μ_a			○	○			
	μ_b	×	×	×	×	×	×	

もし，$\mu_{\mathbf{a}}$ が連続であれば，(*iii*) が成り立つことから必然的に (*vi*) が成り立つことが示せるが，$\mu_{\mathbf{a}}$, $\mu_{\mathbf{b}}$ が連続でないことが分かったので，(*vi*) が成り立つことを直接，証

明する．
まず，μ_{a}，μ_{b} が連続でないことを示す．

命題 4.1. μ_{a}，μ_{b} は連続ではない．

証明． $\|\cdot\|_{\ell^2}$ を ℓ^2−*norm* とする．
μ_{a} を $\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}(e_1+\ldots+e_n)$ の *linear span* に制限すると，$n\to\infty$ のとき，

$$\left\|\frac{e_1+\ldots+e_n}{n^{\frac{3}{4}}}\right\|_{\ell^2}=\sqrt{\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}}\to 0$$

一方，

$$(\mu_{\mathrm{a}})_{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}(e_1+\ldots+e_n)}=\delta_{(\mathrm{a},\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}(e_1+\ldots e_n))}=\delta_{\frac{n}{n^{\frac{3}{4}}}}=\delta_{n^{\frac{1}{4}}}$$

よって，$n\to\infty$ のとき μ_{a} は δ_0 に弱収束しないので， 連続ではない．

次に，μ_{b} が連続ではないことを同様に示す．
μ_{b} を $\frac{1}{n}e_n$ の *linear span* へ制限すると，$n\to\infty$ のとき，

$$\left\|\frac{1}{n}e_n\right\|_{\ell^2}=\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}\to 0$$

一方，

$$(\mu_{\mathrm{b}})_{\frac{1}{n}e_n}=\delta_{(\mathrm{b},\frac{1}{n}e_n)}=\delta_1$$

よって，$n\to\infty$ のとき μ_{b} は δ_0 に弱収束しないので，連続ではない． □

ここで，定理を二つ示す．

定理 4.2. $\|\cdot\|_1$ は μ_{a}− 可測 (*D.F.L.*) である．

証明． E を $\|\cdot\|_1$ に関する ℓ^2 の完備化とし，j を ℓ^2 から E への包含写像とし，j' を j の *dual operator* とする．また，$(\cdot,\cdot)_E$ を E' と E の *natural pairing* とする．

$$E'\xrightarrow{j'}(\ell^2)'\simeq\ell^2\xrightarrow{j}E$$

$\|\cdot\|_1$ が μ_{a}− 可測 (*D.F.L.*) であることを証明するのに，j による μ_{a} の像，$j(\mu_{\mathrm{a}})$ が $(E,\mathcal{C}_E)$ 上で σ− 加法的であることを示せば十分である．
まず，$\mathbf{a}$ が $j'(E')$ 上で 0 となることを示す．
すべての $e_\alpha\in\mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，$(\mathbf{a},e_\alpha)=0$ なので，$j'(y)$ が次の形の場合のみ考えればよい．

$$j'(y)=\sum_{n=1}^{N}A_ne_n\qquad A_1,\ldots,A_n\in\mathbb{R}$$

ℓ^2 上の列 $\{x^m\}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} x^1 &= e_1, \\ x^2 &= e_1 + e_2, \\ &\vdots \\ x^m &= e_1 + \ldots + e_m, \\ &\vdots \end{aligned}$$

このとき，$m \geq k$ のとき $< e_k, x^m >= 1$ より，$m \geq N$ となるすべての m に対して，$< j'(y), x^m >= \sum_{n=1}^N A_n$ となる．さらに，$< j'(y), x^m >= (y, j(x^m))_E$ なので，$m \geq N$ となるすべての m に対して，$(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N A_n$ が得られる．よって，

$$\lim_{m\to\infty} (y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^N A_n. \tag{1}$$

$\{\alpha_m\}$ と U_1 の構成より，$\alpha_m x^m \in U_1$ なので，$\|x^m\|_1 \leq 1/\alpha_m$ となる．仮定より，$\alpha_m \to \infty\ (m \to \infty)$ なので，$\|x^m\|_1 \to 0\ (m \to \infty)$ となる．それゆえに，

$$\lim_{m\to\infty} j(x^m) = 0 \quad in\ E. \tag{2}$$

(1) と (2) より，$\sum_{n=1}^N A_n = 0$, さらに，$(\mathbf{a}, j'(y)) = \sum_{n=1}^N A_n = 0$ となる．これより，$\mathbf{a}$ が $j'(E')$ 上で 0 となることが示される．

i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への *canonical* な写像とすると，$i(\mathbf{a}) = 0$ となる．よって，$i(\delta_{\mathbf{a}})$ は $(E')^*$ 上の *Dirac* 測度 δ_0 となるので，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ は E 上の測度 δ_0 に拡張できる．ゆえに，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ は $\sigma-$ 加法的である． □

定理 4.3. $\|\cdot\|_4$ は μ_a- 可測 $(D.F.L.)$ である．

証明． E を $\|\cdot\|_4$ に関する ℓ^2 の完備化とし，j を ℓ^2 から E への包含写像とし，j' を j の *dual operator* とする．また，$(\cdot,\cdot)_E$ を E' と E の *natural pairing* とする．

$$E' \xrightarrow{j'} (\ell^2)' \simeq \ell^2 \xrightarrow{j} E$$

$\|\cdot\|_4$ が $\mu_{\mathbf{a}}-$ 可測 $(D.F.L.)$ であることを証明するのに，j による $\mu_{\mathbf{a}}$ の像，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ が $(E, \mathcal{C}_E)$ 上で $\sigma-$ 加法的であることを示せば十分である．
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$n > m \geq N \text{ なる } n, m \text{ に対して，} \sum_{j=m+1}^n \left(\tfrac{1}{j}\right)^2 \leq \varepsilon^2$$

ℓ^2 上の列 $\{x^m\}$ のように定義する．

$$\begin{aligned} x^1 &= e_1, \\ x^2 &= e_1 + e_2, \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$x^m = e_1 + \ldots + e_m,$$
$$\vdots$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$n > m \geq N$ なる n, m に対して，

$$\|x^n - x^m\|_4 = \|e_{m+1} + \ldots + e_n\|_4 = \sqrt{\sum_{j=m+1}^{n} \left(\tfrac{1}{j}\right)^2} \leq \varepsilon$$

$\{x^m\}$ は $Caucy$ 列となるので，$\lim_{m\to\infty} \|x - j(x^m)\|_4 = 0$ となる $x \in E$ が存在する．すべての $e_\alpha \in \mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，$(\mathbf{a}, e_\alpha) = 0$ なので，$j'(y)$ が次の形の場合のみ考えればよい．

$$j'(y) = \sum_{n=1}^{N} A_n e_n \qquad A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$$

このとき，$m \geq k$ のとき $< e_k, x^m >= 1$ より，$m \geq N$ となるすべての m に対して，$< j'(y), x^m >= \sum_{n=1}^{N} A_n$ となる．さらに，$< j'(y), x^m >= (y, j(x^m))_E$ なので，$m \geq N$ となるすべての m に対して，$(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^{N} A_n$ が得られる．よって，

$$(y, x)_E = \sum_{n=1}^{N} A_n. \tag{3}$$

i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への $canonical$ な写像とすると，$(\mathbf{a}, e_n) = 1$ なので,$(\mathbf{a}, j'(y)) = \sum_{n=1}^{N} A_n$ となる．よって，

$$(i(\mathbf{a}), y) = \sum_{n=1}^{N} A_n \tag{4}$$

(3) と (4) より，任意の $y \in E'$ に対して，次が成り立つ．

$$(i(\mathbf{a}), y) = (x, y)$$

$i(\mathbf{a})$ の E への制限と x が一致するので，$j(\mu_{\mathbf{a}}) = \delta_x$ が得られる．よって，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ は E 上の測度 δ_x に拡張できるので，$(E, \mathcal{C}_E)$ 上で $\sigma-$ 加法的である． □

上の定理より，今回, 分かった箇所を付け加えると，次のようになる．

ノルム	測 度	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
$\|\cdot\|_1$	γ							
	μ_a			○	○	○	○	○
$\|\cdot\|_4$	γ	○	○	○	○	○	○	○
	μ_a			○	○	○	○	○
	μ_b	×	×	×	×	×	×	

5 *Baxendale* の *Gauss* シリンダー測度

[13] の中で，*Baxendale* による *Gauss* シリンダー測度と標準的な *Gauss* シリンダー測度の比較が研究されている．ここでは，具体的に 4 章で導入した $\mathbf{a}$ を用いて ℓ^2 上にシリンダー測度を構成し，$\gamma_{\mathbf{a}}$ と表す．これは，*Baxendale* の意味で *Gauss* シリンダー測度であるが，標準的な *Gauss* シリンダー測度ではない．この章では，γ と $\gamma_{\mathbf{a}}$ を比較しながら，定理 3.1 における七つの条件について調べる．

まず，Baxendale の *Gauss* 測度と *Gauss* シリンダー測度の定義を述べる．

定義 5.1. (*a*) $\mathbb{R}$ 上の *Borel* 確率測度 λ が *Gauss* 測度であるとは，

(*i*) $\lambda = \delta_0$

または

(*ii*) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，次を満たす $t > 0$ が存在する．

$$\lambda(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_B e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\, dx.$$

(*b*) *Banach* 空間 E 上のシリンダー測度 μ が *Gauss* シリンダー測度であるとは，μ の一次元の分布 $\xi\mu$ ($\xi : E \to \mathbb{R}$ による μ の像測度) が $\mathbb{R}$ 上で *Gauss* 測度であることである．

(*c*) *Banach* 空間 E 上の *Borel* 確率測度 μ が *Gauss* 測度であるとは，$\mathcal{C}_E$ 上に制限すると *Gauss* シリンダー測度となることである．ただし，$\mathcal{C}_E$ は E 上のシリンダー集合全体とする．

定義 5.2. μ を E 上の *Baxendale* の意味の *Gauss* シリンダー測度とする．次をみたすような自己共役作用素 $A \in L(E, E')$ が存在するとき，μ は 分散 A をもつという．

$$\text{すべての } \xi \in E' \text{ に対して，} \phi(\mu, \xi) = exp\{-(\xi, a\xi)/2\}$$

ただし，A が自己共役であるとは，$(\xi, A\eta) = (\eta, A\xi)$ $(\xi, \eta \in E')$ が成り立つことである．

$\gamma_{\mathbf{a}}$ の構成

$$(\mathbf{a}, e_n) = 1,\ n = 1, 2, \ldots$$
$$(\mathbf{a}, e_\alpha) = 0,\ e_\alpha \in \mathcal{I} \backslash \{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$$

となる $\mathbf{a} \in (\ell^2)^*$ をとる．

$\gamma_{\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的 *Gauss* 測度とする．$T : \mathbb{R} \to (\ell^2)^*$ $(t \to t\mathbf{a})$ とし，T による $\gamma_{\mathbb{R}}$ の像測度を $\gamma_{\mathbf{a}^*}$ とする．このとき，ℓ^2 上のシリンダー測度 $\gamma_{\mathbf{a}}$ を次のように定義する．

$$Z = \{x \in \ell^2 : (< x, \xi_1 >, \ldots, < x, \xi_n >) \in D\},$$

$$\tilde{Z} = \{x \in (\ell^2)^* : ((x, \xi_1), \ldots, (x, \xi_n)) \in D\}$$

に対して,

$$\gamma_{\mathbf{a}}(Z)=\gamma_{\mathbf{a}^*}(\tilde{Z})$$

ただし，$\xi_1,\ldots\xi_n\in\ell^2, D\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする．

このとき，$\gamma_{\mathbf{a}}$ は *Baxendale* の意味で *Gauss* シリンダー測度であるが，パラメータのつく場合も考えても従来定義されている *Gauss* シリンダー測度ではない．

E_1, E_4 を $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_4$ に関する ℓ^2 の完備化，j_1 を ℓ^2 から E_1, j_4 を ℓ^2 から E_4 への包含写像，$j_1{}'$ を j_1 の *dual operator*, $j_4{}'$ を j_4 の *dual operator* とする．また，i_1 を $(\ell^2)^*$ から $(E_1{}')$ への canonical な mappimg, ，i_4 を $(\ell^2)^*$ から $(E_4{}')$ への canonical な mappimg とする．定理4.3の証明と同様に，$\mathbf{a}$ が $j_1{}'(E_1{}')$ 上で 0 となることから $i_1(\mathbf{a})=0$ が得られ，$i_1(\gamma_a{}^*)$ は $(E_1{}')^*$ 上の *Dirac* 測度 $\gamma_0=\delta_0$ となり，$j_1(\gamma_a)$ は E_1 上の測度 δ_0 に拡張できる．また，定理4.4と同様に，*Cauchy* 列 $\{x^m\}$ に対して，$\lim_{m\to\infty}\|x-j_4(x^m)\|_4=0$ となる $x\in E_4$ が存在することを利用して，任意の $y\in E_4{}'$ に対して，$(i_4(\mathbf{a}),y)=(x,y)$ が得られる．$i_4(\mathbf{a})$ の E_4 への制限が x と一致するので，$j(\gamma_{\mathbf{a}})=\gamma_x$ となり，$j(\gamma_{\mathbf{a}})$ は E_4 上の測度 γ_x に拡張できる．
以上より $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_4$ が $\gamma_{\mathbf{a}}-$ 可測 $(D.F.L.)$ であるといえる．

参考文献

[1] P. Baxendale, *Gaussian Measures on Function Spaces,* Amer. J. Math. **98**(1976), 891-952.

[2] R.M. Dudley, J. Feldman, and L. LeCam, *On semi-norms and probabilities,and abstract Wiener Spaces,* Ann. of Math. **93**(1971), 390-408.

[3] F. Gong, *A note on generalized Gross and Minlos Theorems,* Dirichet forms and stochastic process (Beijing,1993) 171-173, de Gruyter, Berlin, 1995.

[4] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space,* Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 372-390.

[5] S. Kwapien and B Szymanski, *Some remarks on Gaussian measure in Banach spaces,* Pro.Math Satis. Vol.1(1980), 59-65.

[6] H.H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces,* Lecture.Notes in Math.463, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[7] K. Harai, *Measurable norms and Related conditions in some examples,* Natural Science Report of the Ochanomizu University vol.54 No.1.(2003), 1-7.

[8] K. Harai, *The correction of "Measurable norms and Related conditions in some examples",* Natural Science Report of the Ochanomizu University vol.54 No.2.(2003), 11.

[9] M. Maeda, *Some examples of measurable norms,* J. Math. Anal. Appl. 98(1984),158-165.

[10] M. Maeda, *Generalized rotationally quasi-invariant cylindrical measures,* J. Math. Anal. Appl. 114(1986), 100-110.

[11] M. Maeda, K. Harai and R. Hagihara, *Some examples and connection between cylindrical measures and measurable norms,* J. Math. Anal. Appl.288(2003), 556-564.

[12] M. Maeda, K. Harai and M. Shibuya, *Some remarks on seven conditions approximating to measurable norms,* Sientiae Mathmaticae Japonicae, 59, No.3.(2004), 495-504.

[13] A. Takizawa, *The comparsion between Kuo's definition and Baxendale's on Gauss cylindrical measures,* Master thesis (in Japanese), 2004.

[14] J.A. Yan, *Generalizations of Gross' and Minlos' Theorems,* Lecture.Notes in Math.1372, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 395-404, 1989.